Superellipsen, Superkreise und ihre Flächeninhalte

Ac 2-2017 bis 7/2024

Superellipsen sind Relationen R der Form

$$\boxed{R:\ \left|\frac{x}{a}\right|^{n}+\left|\frac{y}{b}\right|^{n}=1 \quad \text{mit}\quad a,b,n\in\mathbb{R}^{+}\ ;\quad a,b \text{ sind die Halbachsen der Superellipse}}$$

Diese Relation lässt sich auch mithilfe zweier Funktionen f und g darstellen, wenn man die Relationsgleichung nach y auflöst :

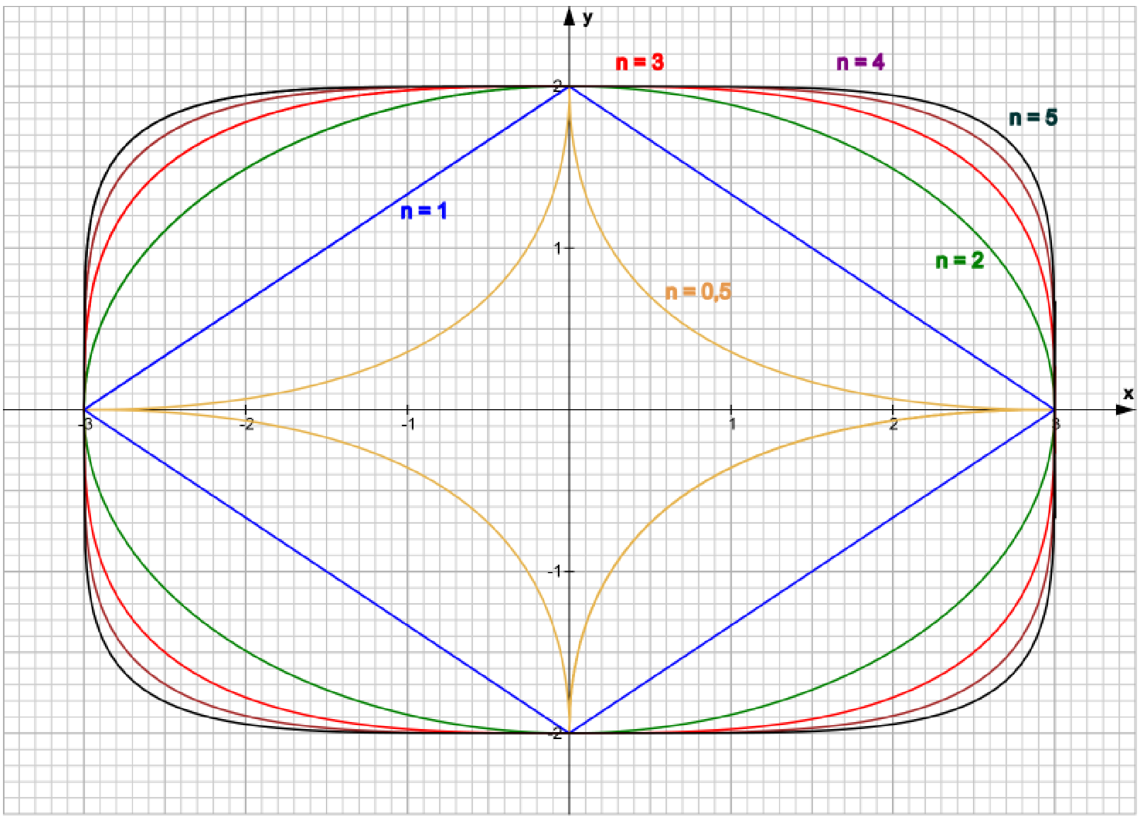
$$\left|\frac{x}{a}\right|^{n}+\left|\frac{y}{b}\right|^{n}=1 \Rightarrow \left|\frac{y}{b}\right|^{n}=1-\left|\frac{x}{a}\right|^{n} \Rightarrow |y|=b\cdot\left(1-\left|\frac{x}{a}\right|^{n}\right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow$$

$$\boxed{f(x)=b\cdot\left(1-\left|\frac{x}{a}\right|^{n}\right)^{\frac{1}{n}} \quad g(x)=-b\cdot\left(1-\left|\frac{x}{a}\right|^{n}\right)^{\frac{1}{n}}\ ;\ x\in[-a;a]}$$

Auf diese Weise lassen sich Superellipsen einfacher grafisch darstellen; eine Alternative ist die Verwendung von „impliziten Graphen", falls der Graphenzeichner dies implementiert hat !

Der Begriff „Superellipse" stammt vom dänischen Wissenschaftler Piet Hein (1905–1996) .
Der französische Physiker und Mathematiker Gabriel Lamé (1795–1870) stellte die Formel für die Superellipse auf (Verallgemeinerung der Ellipsengleichung).

Für n = 2 ergibt sich eine normale Ellipse.
Für n > 2 erhalten wir die eigentliche Superellipse, die sich bei steigendem n-Wert einem Rechteck annähert (s. Grafik) .
Für n < 2 ergeben sich Subellipsen :
n = 1 : Ein Rhombus (für den Spezialfall a = b ein Quadrat) mit der Fläche a · b / 2.
n = 1 / 2 (und a = b) : Eine Astroide .
Für a = b liegt ein sogenannter „Superkreis" (s. unten) vor.



Anwendungsgebiete für Superellipsen:

- Flugzeugkonstruktion

- Schrifttypen (Computerpionier Donald Knuth)

- Architektur, Stadtplanung, Möbeldesign

- Super-Ei (von Piet Hein); ein Ellipsoid gemäß

$$\left|\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}\right|^{2,5}+\left|\frac{z}{4}\right|^{2,5}=1$$

Der Spezialfall „Superkreis“:

Als **Superkreise** bezeichnet man Relationen der Form

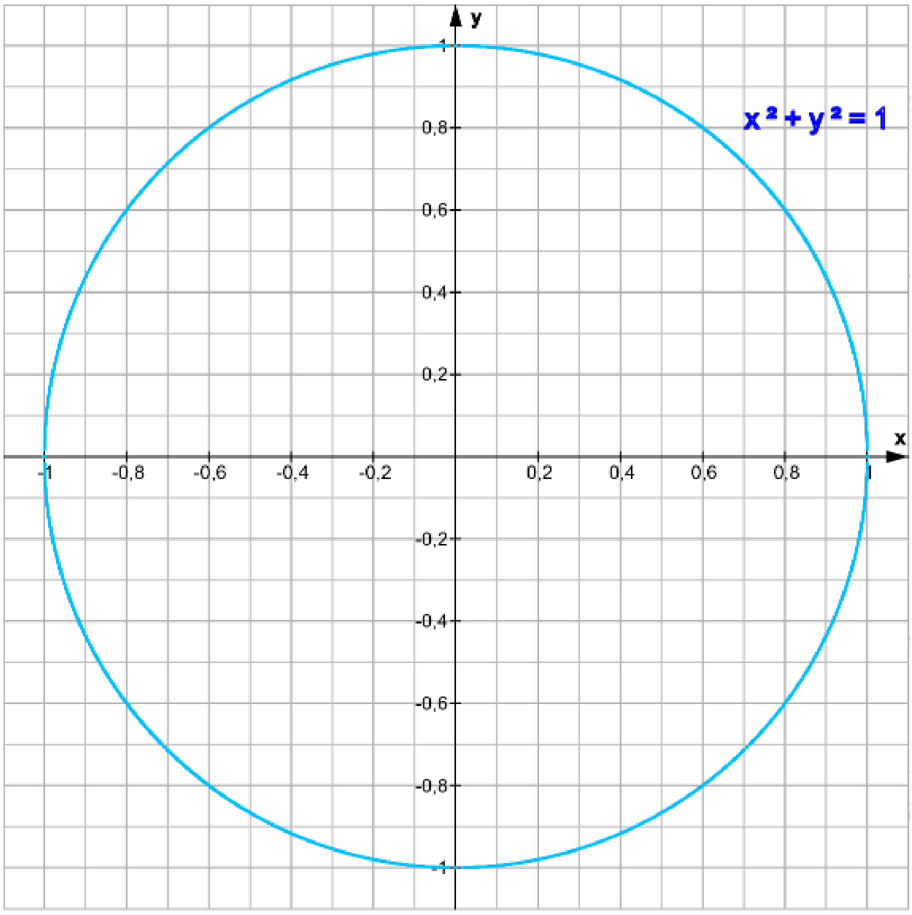
$$\boxed{R:\quad x^n+y^n=r^n\quad ;\ n\in\mathbb{N}-\{0\,;1\}}$$

Für n = 2 erhält man den normalen Kreis mit Radius r .

1. Beispiel (Integral): Kreis R: $x^2 + y^2 = 1$

Die Relation wird zerlegt in $f(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ (oberhalb der x-Achse) und

$g(x) = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ (unterhalb der x-Achse).



Es gilt:

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} - (-(1-x^2)^{\frac{1}{2}})\, dx = 2 \cdot \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = 4 \cdot \int_{0}^{1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$2 \cdot \left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right)\Big|_0^1 = 2 \cdot \arcsin(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

π auf 50 Nachkommastellen genau:
3,14159265358979323846264338327950288419716939937510

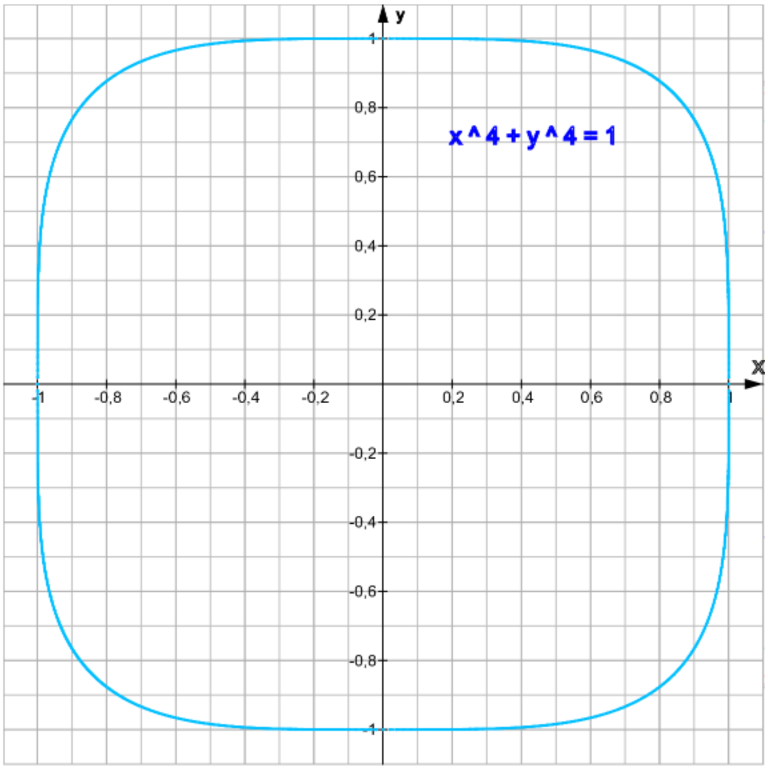
PARI/GP: 3,1415926535897932384626433832795028842
jKarloPlot(Java8): 3.141592653589821
Karloplot(Delphi7): 3.1415926535897932**4** (Datentyp extended)
Maxima: 3.141592653589793
Derive 5: 3.141592653589793240031282 (25 Stellen)
TI84: 3,141592654
CASIO Classpad: 3,141592654
HP Prime: 3,14159265359

2. Beispiel(Integral): Superkreis mit n = 4 (Bezeichnung: „Squircle“) und r = 1

$$R:\ x^4 + y^4 = 1$$

Die Relation wird zerlegt in $f(x) = (1-x^4)^{\frac{1}{4}}$ (oberhalb der x-Achse) und

$g(x) = -(1-x^4)^{\frac{1}{4}}$ (unterhalb der x-Achse).



Berechnung des Integrals:

$$\int_{-1}^{1} (1-x^4)^{\frac{1}{4}} - (-(1-x^4)^{\frac{1}{4}})\ dx = 2\cdot\int_{-1}^{1} (1-x^4)^{\frac{1}{4}} dx = 4\cdot\int_{0}^{1} (1-x^4)^{\frac{1}{4}}\ dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})^2}{2\cdot\sqrt{\pi}} \approx 3{,}708149354602743836$$

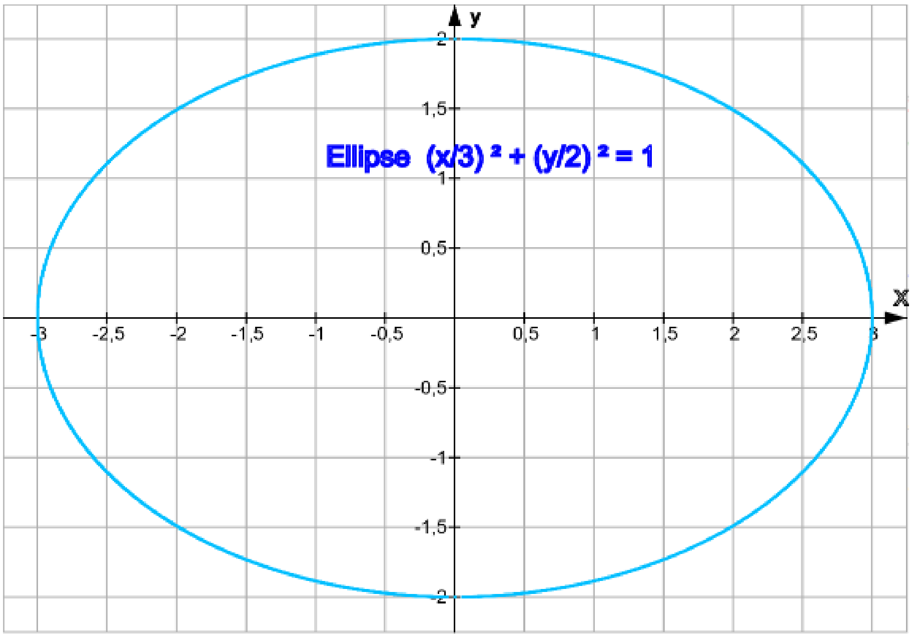
jKarloPlot(Java8): 3.7081493546028024
KarloPlot(Delphi): 3,70814935460274384 (Datentyp extended)
GeoGebra: 3,70814935460275
Maxima: 3,7081493546027438368677
EulerMathToolbox: 3,708149354602739
Derive 5: 3,708149354602743836914935406
TI84: 3,708151131
CASIO Classpad: 3, 708149355

3. Beispiel(Integral): (Normale) Ellipse mit n = 2 a = 3 b = 2

$$\left|\frac{x}{3}\right|^2 + \left|\frac{y}{2}\right|^2 = 1$$

Die Relation wird zerlegt in $f(x) = 2 \cdot (1 - (\frac{x}{3})^2)^{\frac{1}{2}}$ (oberhalb der x-Achse) und

$g(x) = -2 \cdot (1 - (\frac{x}{3})^2)^{\frac{1}{2}}$ (unterhalb der x-Achse).



Für das Integral ergibt sich :

$$\int_{-3}^{3} f(x) - g(x)dx = 4 \cdot \int_{-3}^{3} (1 - (\frac{x}{3})^2)^{\frac{1}{2}} = 8 \cdot \int_{0}^{3} (1 - (\frac{x}{3})^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$8/3 \cdot \int_{0}^{3} (9 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 4/3 \cdot [x \cdot \sqrt{9 - x^2} + 9 \cdot \arcsin(\frac{x}{3})]\Big|_{0}^{3} =$$

$$4/3 \cdot 9 \cdot \arcsin(1) = 12 \cdot \frac{\pi}{2} = 6\pi$$

Dies stimmt auch mit der allgemeinen Flächeninhaltsformel für die Ellipse überein:
A = π · a · b

6π auf 30 Nachkommastellen genau: 18,849555921538759430775860299677

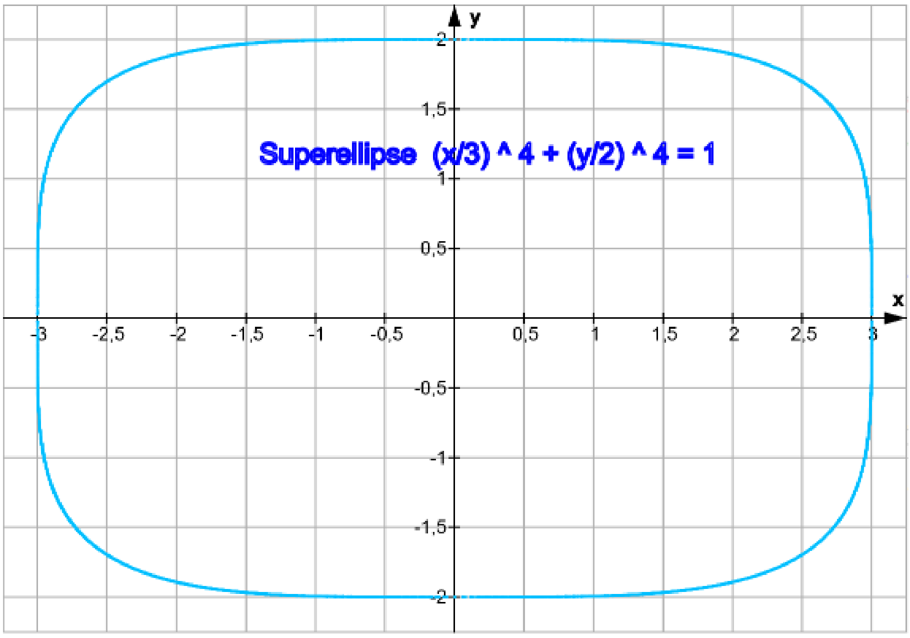
Der von Java8 berechnete Double-Wert stimmt bis auf 13 Nachkommastellen !

4. Beispiel(Integral): SuperEllipse mit n = 4 a = 3 b = 2

$$\left|\frac{x}{3}\right|^4 + \left|\frac{y}{2}\right|^4 = 1$$

Die Relation wird zerlegt in $f(x) = 2\cdot(1-(\frac{x}{3})^4)^{\frac{1}{4}}$ (oberhalb der x-Achse) und

$g(x) = -2\cdot(1-(\frac{x}{3})^4)^{\frac{1}{4}}$ (unterhalb der x-Achse).



Für das Integral ergibt sich :

$$\int_{-3}^{3} f(x)-g(x)dx = 2\cdot\int_{-3}^{3} 2\cdot(1-\frac{x^4}{3^4})^{\frac{1}{4}} = 8\cdot\int_{0}^{3}(1-\frac{x^4}{3^4})^{\frac{1}{4}} = \frac{8}{3}\cdot\int_{0}^{3}\sqrt[4]{81-x^4} = \frac{3\cdot\Gamma(\frac{1}{4})^2}{\sqrt{\pi}} \approx$$

22,24889612761646302120620416634312055... (berechnet mit "PARI/GP")

WolframAlpha:
22,248896127616463021206204166343120554611185882261202867031136540...

Maxima: 22.24889612761646

Derive5: 22.2488961276164630212497318336

Karloplot(Delphi) 22,248896127616463

HP Prime: 22,2488961276

Der von Java8 berechnete Double-Wert stimmt bis auf 13 Nachkommastellen !